

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

## **1 Нелинейные электрические цепи, элементы цепей, режимы работы, параметры**

**Классификация нелинейных элементов. Определения.** Элементы электрических цепей, как известно, подразделяют на активные и пассивные. К первым относятся источники электрической энергии, источники сигналов. Пассивные элементы электрических цепей — резисторы, катушки индуктивности, конденсаторы могут быть, в свою очередь, разделены на *линейные* и *нелинейные*.

Однако существует широчайшая группа так называемых нелинейных элементов, как пассивных, так и активных: нелинейные резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности, электронные, ионные и полупроводниковые приборы, а также другие многочисленные элементы, основанные на принципах взаимодействия носителей тока с тепловыми, световыми и электромагнитными полями, оптические квантовые генераторы и проч.

*Нелинейной* считается цепь, содержащая хотя бы один нелинейный элемент.

*Нелинейными* называются элементы, параметры которых зависят от величины и (или) направления связанных с этими элементами переменных (напряжения, тока, магнитного потока, заряда, температуры, светового потока и др.). Нелинейные элементы описываются нелинейными характеристиками, которые не имеют строгого аналитического выражения, определяются экспериментально и задаются таблично или графиками.

Нелинейные элементы подразделяются на *резистивные*, поведение которых описывается нелинейными алгебраическими уравнениями, и *энергоемкие*, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями, — нелинейные конденсаторы и нелинейные катушки индуктивности.

Поскольку в электронике наиболее часто применяются нелинейные резистивные цепи, сузим дальнейшее изложение широкой темы нелинейных цепей до рассмотрения только круга *нелинейных резистивных цепей*.

К этому классу цепей относятся цепи, содержащие, например, такие широко известные элементы, как варисторы, терморезисторы, полупроводниковые диоды, транзисторы, электровакуумные приборы и др.

Нелинейные элементы можно разделить на *двух-* и *многополюсные*. Последние содержат три (различные полупроводниковые и электронные триоды) и более (магнитные усилители, многообмоточные трансформаторы, тетроды, пентоды и др.) выводов, с помощью которых они подсоединяются к электрической цепи.

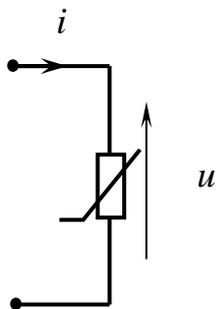


Рис.1 — УГО резистивного нелинейного элемента

С функциональной точки зрения двухполюсные нелинейные элементы относят к неуправляемым нелинейным элементам. Общее условное графическое обозначение двухполюсного неуправляемого резистивного нелинейного элемента показано на рис. 1.

Здесь следовало бы оговориться: некоторые нелинейные элементы, имея два физических вывода, управляются внешним воздействием, например теплом в случае терморезистора, световым потоком — в случае фотодиода и др.

Многополюсные нелинейные элементы относят к управляемым. На рис. 2 показано обобщенное представление четырехполюсного управляемого резистивного нелинейного элемента. Характерной особенностью многополюсных (управляемых) элементов является то, что в общем случае их свойства определяются семействами входных, выходных и сквозных характеристик. Например, входные характеристики строят для ряда фиксированных значений одной из выходных электрических переменных, выходные — для ряда фиксированных значений одной из входных переменных.

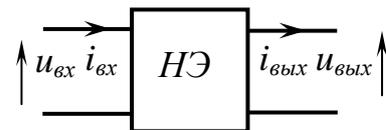


Рис. 2 — Управляемый нелинейный четырехполюсный элемент

По другому признаку классификации нелинейные элементы можно разделить на инерционные и безынерционные. Инерционными называются элементы, характеристики которых

зависят от скорости изменения переменных. Для таких элементов статические характеристики, определяющие зависимость между действующими значениями переменных, отличаются от динамических характеристик, устанавливающих взаимосвязь между мгновенными значениями переменных. Безынерционными называются элементы, характеристики которых не зависят от скорости изменения переменных. Для таких элементов статические и динамические характеристики совпадают.

Понятия инерционных и безынерционных элементов относительны: элемент может рассматриваться как безынерционный в допустимом (ограниченном сверху) диапазоне частот, при выходе за пределы которого он переходит в разряд инерционных.

Основной характеристикой нелинейного резистивного элемента является его статическая *вольт-амперная характеристика* (ВАХ).

ВАХ нелинейного резистивного элемента — это зависимость между током  $i$ , проходящим через элемент, и падением напряжения на нем  $u$ . ВАХ резистивного элемента цепи выражается некоторой функциональной зависимостью  $i = f(u)$ . ВАХ обычно определяют экспериментальным путем и представляют в виде таблиц или графиков.

В зависимости от вида характеристик различают нелинейные элементы с симметричными и несимметричными характеристиками. Симметричной называется характеристика, не зависящая от направления определяющих ее величин, т.е. имеющая симметрию относительно начала системы координат (рис. 3). Наличие у нелинейного элемента симметричной характеристики позволяет в целом ряде случаев упростить анализ схемы, осуществляя его в пределах одного квадранта.

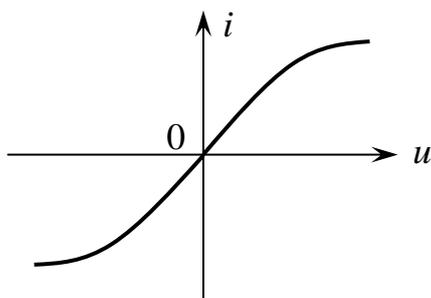


Рис. 3 — Симметричная ВАХ

По типу характеристики можно также разделить все нелинейные элементы на элементы с однозначной (рис. 3) и неоднозначной характеристиками  $N$ -типа (рис. 4) и  $S$ -типа (рис. 5). В случае неоднозначной характеристики каким-то значениям

напряжения могут соответствовать два или более значения тока, или наоборот. Например, на ВАХ (рис. 5) одному напряжению  $U$  соответствует три тока  $I_1, I_2, I_3$ . У нелинейных резисторов неоднозначность характеристики обычно связана с наличием падающего участка, для которого дифференциальное сопротивление отрицательно (например, в точке  $A$  на рис. 4), а у нелинейных индуктивных и емкостных элементов — с гистерезисом.

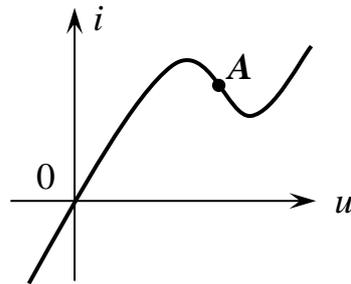


Рис. 4 — Многозначная ВАХ N-типа

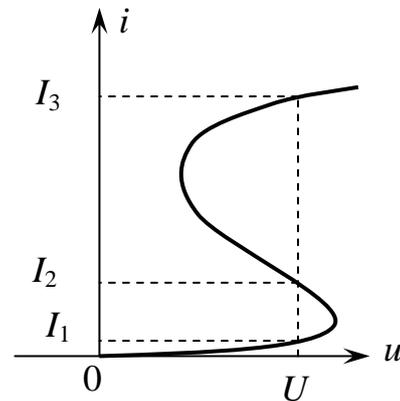


Рис. 5 — Неоднозначная ВАХ S-типа

### Понятия рабочей точки, режимов и классов работы НЭ.

Нелинейный элемент (НЭ) в составе радиоэлектронной цепи всегда устанавливается в необходимый *режим работы*. Понятие режима работы связано с двумя его основными показателями: *расположением рабочей точки на ВАХ нелинейного элемента и величиной сигнала, действующего относительно рабочей точки.*

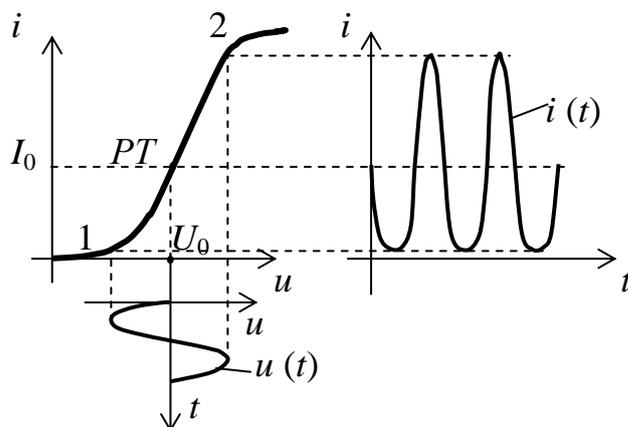


Рис. 6 — К пояснению статического и динамического режимов работы

Введем сначала понятие рабочей точки. Под рабочей точкой понимают любую точку, принадлежащую ВАХ данного нелинейного элемента и имеющую всегда не менее двух координат  $U_0$  и  $I_0$  (рис. 6). Положение рабочей точки может быть задано либо приложением напряжения смещения  $U_0$ , либо фиксацией постоянной

величины тока  $I_0$ . В любом случае задание одной из координат  $U_0$

или  $I_0$  однозначно определяет положение рабочей точки на ВАХ НЭ. Режим, в котором НЭ работает при неизменном положении рабочей точки, носит название статического или режима постоянного тока. Положение рабочей точки на ВАХ можно изменять, управляя одной из ее координат  $U_0$  или  $I_0$ . Изменение положения рабочей точки возможно с помощью некоторого управляющего устройства или по воле оператора. В любом случае при включении источника питания нелинейный элемент в составе радиотехнической цепи устанавливается в статический режим, когда все электрические величины во времени не меняются.

Однако нелинейные элементы предназначены для *преобразования сигналов*, поэтому в реальном устройстве относительно рабочей точки действует некоторый сигнал, представленный изменениями напряжения или тока. На рис. 6 показано, как приложение некоторого гармонического напряжения  $u(t)$  относительно рабочей точки  $U_0$  перемещает последнюю по ВАХ в пределах между положениями 1 и 2, вызывая при этом негармонический ток  $i(t)$  в силу нелинейности ВАХ. Данный режим носит название *динамического* или *режима переменного тока*.

Приложенный к нелинейному элементу сигнал может иметь разную величину. Если размах сигнала мал в сравнении с протяженностью ВАХ (рис. 7, а), то такой динамический режим носит название *режима малого сигнала*. Когда размах сигнала соизмерим с протяженностью ВАХ или превышает ее, говорят, что нелинейный элемент работает в *режиме большого сигнала* (рис. 7, б). Кроме того, в практике широко пользуются понятием *класса режима работы*. Различают несколько таких классов. Приведенные ниже иллюстрации позволяют получить нужные представления.

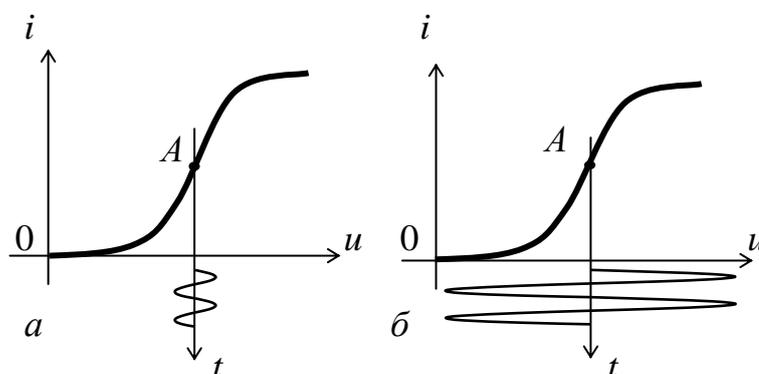


Рис. 7 — Режимы работы:  
 а — режим малого сигнала;  
 в — режим большого сигнала

На рисунке 7, *a* рабочая точка находится на линейном участке, и малый сигнал не выходит за рамки этой линейной части ВАХ. Такой малосигнальный режим принято называть *режимом класса «А»* или *линейным режимом работы* нелинейного элемента.

Другой характерный режим — *режим класса «В»* — представлен на рисунке 8, *a*. Рабочая точка *B* находится у нижнего сгиба ВАХ, и воздействие велико, так что ток представляет собой последовательность «полуволевых» импульсов, характерную тем, что ток через нелинейный элемент протекает в течение половины периода сигнала.

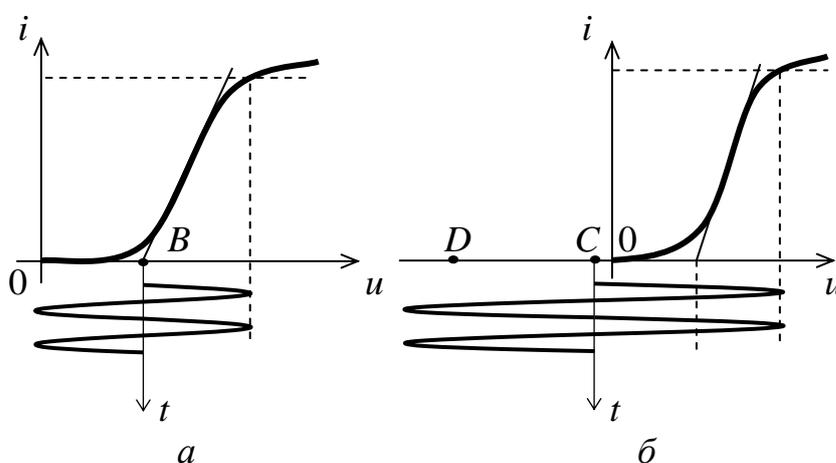


Рис. 8 — Режимы работы:  
*a* — класса «В»; *б* — классов «С», «D»

Если рабочую точку переместить левее, увеличив размах сигнала (рис. 8, *б*), то режим работы будет соответствовать *классу «С»*.

При смещении рабочей точки в положение *D* и дальнейшем увеличении размаха сигнала нелинейный элемент работает в *режиме класса «D»*.

Три последних режима *B*, *C* и *D* характерны тем, что ток через нелинейный элемент носит импульсный характер и протекает в течение времени, равного (*B*) и меньшего половины периода (*C* и *D*) приложенного сигнала. Поэтому эти режимы работы называют режимами работы с *отсечкой тока*. Кроме того, в силу большого размаха подводимого сигнала их называют также *перенапряженными режимами*.

**Параметры нелинейного элемента в статическом и динамическом режимах.** Физическая природа, типы и особенности ВАХ нелинейных элементов многообразны. Введем теперь численные показатели ВАХ, называемые *параметрами* нелинейных элементов. Соответственно двум режимам работы нелинейного элемента — *статическому и динамическому* — различают *параметры статические и динамические*, определяемые по-разному. Общим для тех и других является то, что они *принадлежат данной рабочей точке* ВАХ нелинейного элемента. При изменении положения рабочей точки на ВАХ величины параметров изменяются.

Введем вначале *статические параметры*. Для неуправляемого нелинейного элемента их два: *сопротивление постоянному току*  $R_0$  и *крутизна характеристики*  $S_0$ . Эти параметры являются взаимно обратными и определяются в данной рабочей точке как

$$R_0 = \frac{1}{S_0} = \left. \frac{U_0}{I_0} \right|_{PT}. \quad (1)$$

Что касается величины  $R_0$ , она измеряется в принятых единицах сопротивления, а крутизну, имеющую размерность проводимости, в практической радиотехнике принято выражать в *миллиамперах на вольт* (мА/В).

Иллюстрацией к определению статических параметров может служить рисунок 6, где обозначены координаты некоторой рабочей точки  $U_0$  и  $I_0$ . Для данной ВАХ при перемещении рабочей точки вниз  $R_0$  растет, при перемещении ее вверх  $R_0$  падает. Характерным свойством статических параметров является то, что они всегда *положительны*.

*Динамические параметры* неуправляемого нелинейного элемента  $R_d$  и  $S$  также взаимно обратны и в данной рабочей точке определяются как отношение *приращений напряжения и тока*:

$$R_d = \frac{1}{S} = \left. \frac{du}{di} \right|_{PT} \approx \left. \frac{\Delta u}{\Delta i} \right|_{PT}. \quad (2)$$

Величины этих параметров меняются в зависимости от положения рабочей точки на ВАХ нелинейного элемента. Для управляемых нелинейных элементов (электронная лампа, биполярный и полевой транзисторы и проч.) крутизну определяют

по эффекту управления выходной величины величиной входной. Если выходной величиной является ток  $i_{вых}$ , а входной — напряжение  $u_{ex}$  (случай электронной лампы, полевого транзистора), то крутизну определяют как

$$S = \left. \frac{di_{\hat{a}\hat{o}}}{du_{\hat{a}\hat{o}}} \right|_{PT} \approx \left. \frac{\Delta i_{\hat{a}\hat{o}}}{\Delta u_{\hat{a}\hat{o}}} \right|_{PT} \quad (3)$$

при фиксированном значении выходного напряжения. Значение крутизны может быть определено по любому из семейств характеристик для данного элемента. Умение определять статические и динамические параметры конкретных нелинейных элементов приобретается в ходе практики.

## **2 Расчеты нелинейных электрических цепей**

Как и в случае линейных электрических цепей, задача расчета нелинейной резистивной цепи заключается в общем случае в определении токов ветвей и напряжений на элементах цепи при заданных параметрах независимых источников энергии. Для нелинейных цепей, так же как и для линейных, справедливы законы Кирхгофа. Особенность нелинейных цепей в уравнениях, составленных по законам Кирхгофа, отражается зависимостью коэффициентов уравнений от воздействий и реакций (напряжений и токов). Следовательно, процессы в нелинейной электрической цепи описываются нелинейными уравнениями, т.е. уравнениями, в которых хотя бы один из коэффициентов зависит от переменной.

При анализе нелинейных цепей нельзя пользоваться принципом суперпозиции (наложения), так как параметры цепи при одном источнике отличаются от параметров при нескольких источниках. Нельзя также пользоваться и методами расчета цепей, основанными на принципе наложения: методом контурных токов, методом узловых потенциалов и др. По этой причине основным методом расчета нелинейных цепей является решение исходных нелинейных уравнений. Главная сложность на этом пути — отсутствие универсальных способов решения таких уравнений. Отсюда оригинальность и часто неповторимость методов решения конкретных задач.

Все известные методы можно разделить на три группы:

- 1) графические;
- 2) графоаналитические;
- 3) численные.

Электронные цепи чаще всего питаются постоянным током, поэтому первый этап анализа нелинейных цепей — нахождение постоянных токов и напряжений на элементах цепи при отсутствии переменных (информационных) сигналов, т.е. определение положения *рабочей точки*. Такую задачу можно решить графическим методом.

Рассмотрим простейшую цепь, состоящую из идеального источника постоянного напряжения  $E$  и нелинейных сопротивлений  $R_1(i)$  и  $R_2(i)$  (рис. 9, а). ВАХ нелинейных сопротивлений  $R_1(i)$  и  $R_2(i)$  заданы графически и приведены на рис. 9, б.

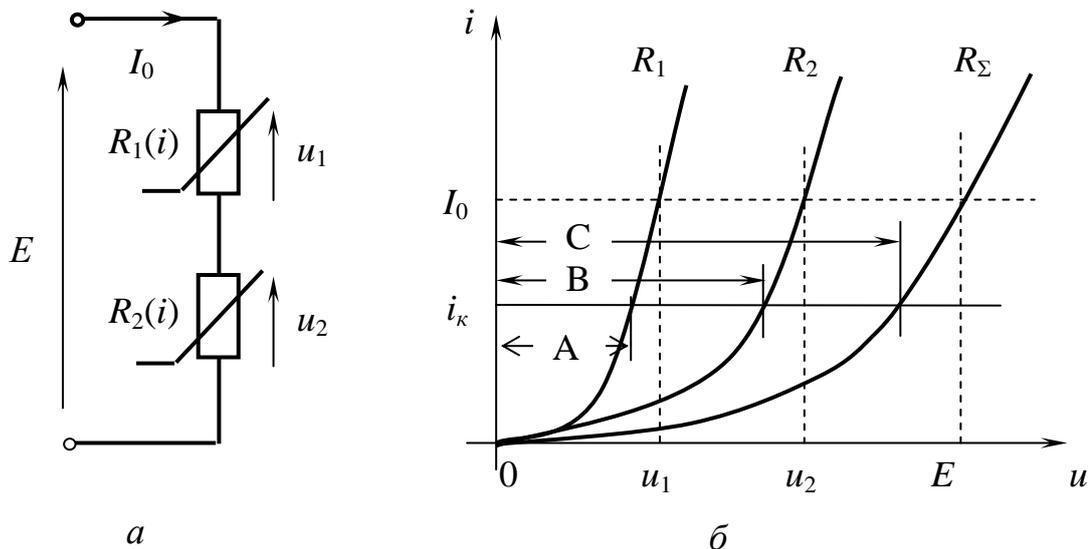


Рис. 9 — Последовательное соединение нелинейных элементов

Очевидно, что при любом значении тока  $i$  напряжение  $u$  на зажимах данного участка цепи равно сумме напряжений на каждом из нелинейных сопротивлений:

$$u = u_1(i) + u_2(i).$$

Следовательно, если при некотором значении тока в цепи  $i_k$  просуммировать абсциссы точек пересечения ВАХ нелинейных сопротивлений с прямой  $i = i_k$  ( $C = A+B$ ), то полученная точка  $C$  будет являться точкой результирующей ВАХ последовательного соединения нелинейных сопротивлений. Таким образом, участок цепи, содержащий два последовательно включенных нелинейных сопротивления  $R_1$  и  $R_2$ , может быть заменен одним нелинейным

сопротивлением  $R_{\Sigma}$ , ВАХ которого получается путем суммирования абсцисс ВАХ составляющих сопротивлений. Аналогичным образом можно заменить участок цепи, содержащий последовательно включенные линейное и нелинейное сопротивления, а также участок цепи, представляющий собой последовательное соединение произвольного количества линейных и нелинейных сопротивлений.

Построив ВАХ последовательного соединения нелинейных сопротивлений, можно вернуться к исходной задаче — определить ток в цепи и напряжения на резисторах  $R_1$  и  $R_2$ , если известна величина  $E$ . Для этого отложим по оси абсцисс величину напряжения, равную  $E$ , и из этой точки восстановим перпендикуляр до пересечения с ВАХ  $R_{\Sigma}$ . Точка их пересечения определит искомый ток в цепи  $I_0$ . Пересечение прямой  $i = I_0$  с ВАХ сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$  позволяет найти искомые падения напряжений на этих нелинейных сопротивлениях  $u_1$  и  $u_2$ . Из рисунка хорошо видно, что ток через оба нелинейных сопротивления одинаков и закон Кирхгофа для напряжений выполняется ( $E = u_1 + u_2$ ).

Рассмотренный графический метод нагляден и прост, однако громоздок, так как для определения единственного значения тока  $I_0$  необходимо строить суммарную ВАХ.

В простейшем случае, когда рассматриваемая цепь содержит только два последовательно включенных сопротивления, а э.д.с. источника имеет одно фиксированное значение  $E$ , для определения рабочей точки можно воспользоваться более простым приемом, позволяющим обойтись без построения суммарной ВАХ. С этой целью на оси напряжений (рис. 10, а) откладывают отрезок, соответствующий заданному значению э.д.с. источника напряжения  $E$ . Из этой точки строят зеркальное отображение ВАХ одного из элементов, например сопротивления  $R_2$ . ВАХ другого элемента строят в обычных координатах. В точке пересечения характеристик выполняются условия электрического равновесия цепи — при одинаковом токе ( $I_0$ ) через нелинейные сопротивления для напряжений выполняется закон Кирхгофа ( $E = u_1 + u_2$ ). Следовательно, точка пересечения кривых и есть искомая рабочая точка, а ток в цепи равен  $I_0$ .

Если одно из сопротивлений, например  $R_2$ , является линейным (рис. 10, б), то задача определения рабочей точки нелинейной цепи с последовательным соединением двух сопротивлений упрощается.

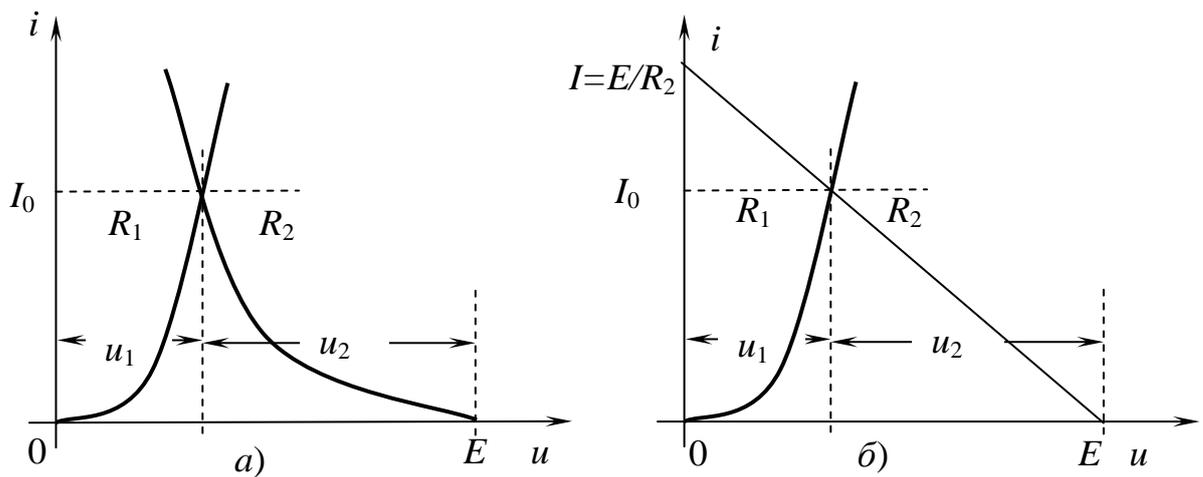


Рис. 10 — Определение рабочей точки последовательного соединения двух элементов

В этом случае для определения рабочей точки нелинейного сопротивления  $R_1$  необходимо найти точку пересечения его ВАХ с ВАХ линейного сопротивления, которая в этом случае вырождается в прямую, проходящую через точку  $E$  на оси напряжений и точку  $I = E/R_2$  на оси токов, причем  $R_2$  это значение линейного сопротивления. Сопротивление  $R_2$ , ВАХ которого представляется прямой линией, обычно рассматривается как *сопротивление нагрузки* нелинейного элемента  $R_1$  а прямая, отображающая ВАХ этого сопротивления, называется *нагрузочной прямой*. Уравнение нагрузочной прямой имеет вид

$$i = (E - u) / R_2. \quad (5)$$

В уравнении (5) ток  $i$  и напряжение  $u$  — текущие координаты нагрузочной прямой.

Точка пересечения нагрузочной прямой и ВАХ нелинейного элемента, определяющая ток в цепи ( $I_0$ ) и напряжения на элементах цепи, является *рабочей точкой*. Рассмотренный способ является основным при анализе режима по постоянному току цепей с электронными и полупроводниковыми приборами.

Подобно изложенному выше способу может быть решена и задача расчета цепи в случае параллельного соединения нелинейных сопротивлений (рис. 11).

Как и в случае последовательного соединения, при параллельном соединении можно построить суммарную ВАХ параллельного включения нелинейных элементов. Однако если при последовательном включении для получения суммарной характеристики суммировались напряжения при одинаковых токах,

то при параллельном соединении необходимо суммировать токи при одинаковых напряжениях, так как для данной цепи исходным является первый закон Кирхгофа  $I_0 = i_1 + i_2$ .

На рис. 11, б показан пример построения ВАХ ( $R_{\Sigma}$ ) параллельного соединения двух нелинейных сопротивлений  $R_1(i)$  и  $R_2(i)$ . Здесь для каждой абсциссы ( $E$ ) просуммированы ординаты кривых  $R_1$  и  $R_2$  ( $i_1$  и  $i_2$ ).

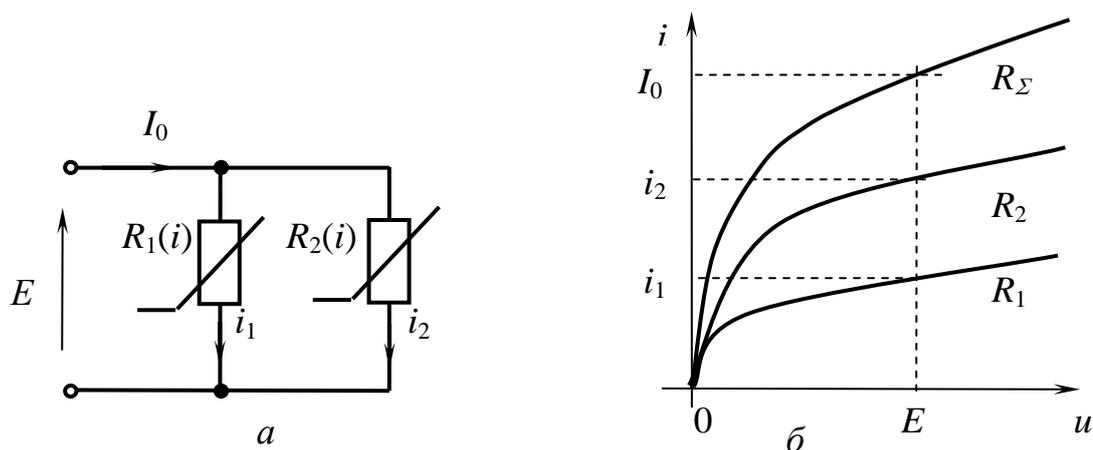


Рис. 11 — Параллельное соединение нелинейных элементов

В случае если при параллельном соединении двух элементов задан ток генератора, можно найти рабочую точку без построения суммарной ВАХ соединения. Задача решается аналогично задаче последовательного соединения (рис. 12.10, б). Характеристика одного нелинейного элемента строится в обычных координатах, а ВАХ другого элемента строится обращенной из точки  $i = I_0$ . Точка пересечения обеих ВАХ определяет рабочую точку цепи.

При последовательно-параллельном соединении нелинейных элементов (рис. 12) вначале находится эквивалент вольт-амперной характеристики

параллельного соединения

элементов, затем определяется эквивалентная ВАХ всей цепи описанными выше способами.

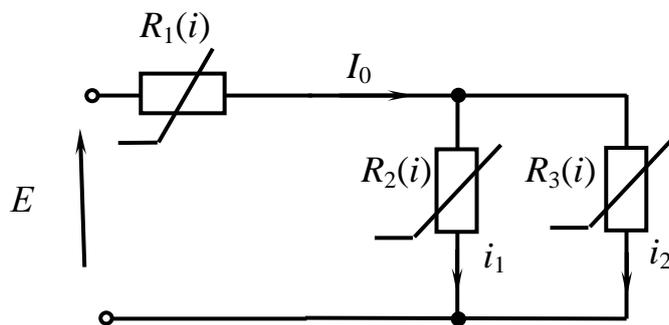


Рис. 12 — Последовательно-параллельное соединение нелинейных элементов

Графические методы расчета удобно применять при расчетах на постоянном токе. При расчетах на переменном токе эти методы не позволяют получить полной картины (качественной и количественной) электрических процессов. В этом случае обычно применяются графоаналитические и численные методы расчета.

Применение графоаналитических и численных методов предполагает два этапа. На первом этапе ВАХ, определенная экспериментальным путем и представленная в виде таблицы или графика, заменяется аналитической функцией. Такая замена называется *аппроксимацией*. На практике пользуются сравнительно простыми аппроксимирующими функциями, удобными при аналитическом исследовании, хотя и неточно представляющими реальную характеристику. На втором этапе аналитическое выражение ВАХ используется совместно с исходным нелинейным уравнением для нахождения его решения.