ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Теоретическая механика – наука об общих законах движения и равновесия материальных тел и о возникающих при этом механических взаимодействиях между телами.

Движение (механическое движение) – это изменение с течением времени положения данного тела в пространстве по отношению к другим телам.

Равновесие – это состояние покоя тела по отношению к другим материальным телам.

Механическое взаимодействие между телами – это вид взаимодействия, при котором происходит изменение движения этих тел или изменение их формы (деформация).

Сила - мера механического взаимодействия между телами.

МАТЕРИАЛЬНЫЕ ОБЪЕКТЫ
1. **Материальная точка** (МТ, в дальнейшем иногда слово «материальная» будем опускать) – это тело, имеющее массу, размерами которого при изучении его движения можно пренебречь.
2. **Абсолютно твердое тело** (АТТ, в дальнейшем – «твердое тело») – тело, расстояние между любыми двумя точками которого всегда остается постоянным.
3. **Механической системой** (МС) материальных точек или твердых тел называется такая их совокупность, в которой положение или движение каждой точки (или тела) зависит от положения и движения всех остальных.

Основная задача теоретической механики: изучение общих законов движения и равновесия материальных тел под действием приложенных к ним сил.

Основные разделы теоретической механики:
1. Кинематика (изучает движение материальных объектов без учета масс и сил);
2. Статика (изучает условия равновесия материальных объектов под действием сил);
3. Динамика (изучает законы движения материальных объектов под действием сил).

КИНЕМАТИКА

Кинематика – это раздел теоретической механики, изучающий движение материальных объектов без учета масс, сил и энергий (т.е. не рассматривающий причины изменения состояния движения).

КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Система отсчета – это *система координат*, жестко связанных с *телом отсчета*, снабженная *часами* (для простоты ограничимся использованием декартовых координат: $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$; пространство – трехмерное евклидово пространство; время $\boldsymbol{t}$ – скалярная непрерывно изменяющаяся величина).

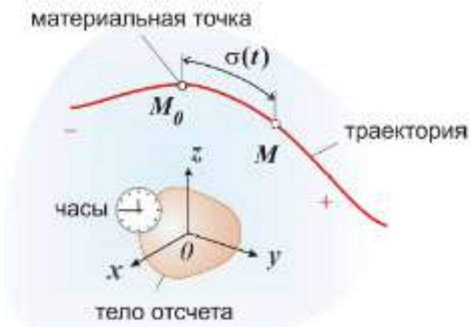


Рисунок 1 – Система отсчета и траектория движения материальной точки

Траектория материальной точки – это непрерывная линия, которую описывает точка M в заданной системе отсчета, двигаясь из начального положения M_0 (начало отсчета, при этом t=0).
Дуговая (путевая) координата $\sigma(t)$ – это отсчитанное по введенному правилу знаков расстояние по дуге (по траектории) траектории от начального положения точки (начало отсчета) до положения точки во время t.
Дуговая координата определяет положение точки относительно начала отсчета.
Задать движение (задать *закон движения*) точки (тела) означает задать положение этой точки (тела) в пространстве в заданной системе отсчета в любой момент времени.

Основная задача кинематики – зная закон движения заданного тела (точки), определить все кинематические величины, характеризующие как движение этого тела в целом, так и движение каждой из его точек в отдельности (траектории, скорости, ускорения).

ТРИ СПОСОБА ЗАДАНИЯ ЗАКОНА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

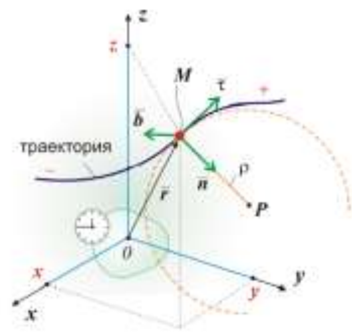


Рисунок 2 – К способам задания положения и закона движения материальной точки

1) **Векторный способ.**
Закон движения задают как функцию радиус-вектора $\vec{r}$ точки от времени:
$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Радиус-вектор – это вектор, проведенный из начала координат в заданную точку.
2) **Координатный (скалярный) способ**.
Закон движения задают как зависимость всех координат точки от времени:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

Отметим, что координаты (x,y,z) заданной точки совпадают с координатами ее радиус-вектора $\vec{r}$.
3) **Естественный способ.**
Закон движения точки задают в виде зависимости ее дуговой координаты от времени:

$$\sigma=\sigma(t).$$

Естественные оси – это оси, жестко связанные с данной материальной точкой, которые задают с помощью **ортов естественного трехгранника** $\vec{n}$:, $\vec{\tau}$ и $\vec{b}$, при этом
орт $\vec{n}$ направлен из данной точки к центру кривизны траектории;
орт $\vec{\tau}$ направлен по касательной к траектории по направлению движения;
орт $\vec{b}$ ортогонален плоскости, образованной векторами $\vec{n}$ и $\vec{\tau}$.

$$|\vec{n}| = |\vec{\tau}| = |\vec{b}| = 1, \quad \vec{n}\perp\vec{\tau}\perp\vec{b}.$$

ТРАЕКТОРИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

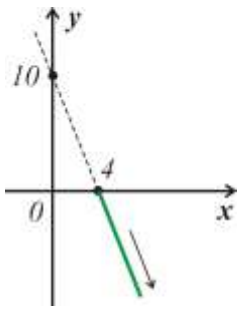
Закон движения, записанный в координатной форме, представляет собой одновременно уравнения траектории точки в параметрическом виде.
Уравнение траектории в явном виде можно найти, исключив из уравнений движения время t.
Пример 1. Пусть движение точки в плоскости $\{xy\}$ задано уравнениями:

$$\begin{cases} x = 2t + 4 \\ y = -5t \end{cases}$$

Выразив параметр $\boldsymbol{t}$ из второго уравнения, и, подставив в первое, получим уравнение траектории:

$$y=10-2.5x.$$

В начальный момент времени t=0, x=4 , y=0. При увеличении t координата x возрастает, а y убывает.



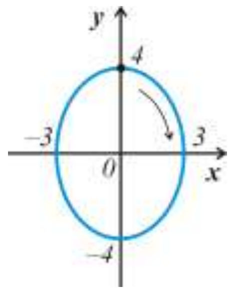
Пример 2. Пусть движение точки в плоскости $\{xy\}$ задано уравнениями:

$$\begin{cases} x = 3\sin \pi t \\ y = 4\cos \pi t \end{cases}.$$

Разделим первое уравнение на 3, второе на 4, затем возведем оба уравнения в квадрат и сложим. В результате, с учетом основного тригонометрического тождества, получим уравнение траектории:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$$

В начальный момент времени t=0, x=0, y=4. При увеличении t координата x возрастает, а y убывает.



СКОРОСТЬ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Средняя скорость материальной точки за промежуток времени Δt равна отношению вектора перемещения $\Delta\vec{r}$ точки к соответствующему промежутку времени

$$\vec{V} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

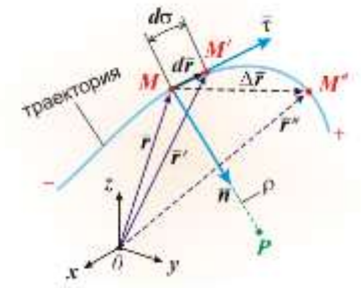


Рисунок 3 – К определению скорости материальной точки

Скорость (мгновенная скорость) материальной точки в данный момент времени равна первой производной от радиус-вектора точки по времени

1. **Векторный способ записи**:

$$\bar{V} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} \equiv \dot{\bar{r}}.$$

Отметим, что $d\vec{r} = \vec{r}\,' - \vec{r} \approx d\sigma \cdot \vec{\tau}$, отсюда следует, что вектор скорости направлен по касательной к траектории в сторону движения точки

$$\vec{V} \uparrow\uparrow \vec{\tau}.$$

2. **Координатный способ записи:**

$$\begin{cases} V_x = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x}, \\ V_y = \dfrac{dy}{dt} = \dot{y}, \\ V_z = \dfrac{dz}{dt} = \dot{z}. \end{cases}$$

Модуль скорости в этом случае может быть найден по теореме Пифагора:

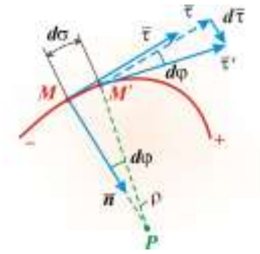
$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}.$$

3. **Естественный способ записи:**

$$\vec{V} = \frac{d\sigma}{dt}\vec{\tau} = \dot{\sigma}\vec{\tau}, \quad V = \frac{d\sigma}{dt} = \dot{\sigma}.$$

УСКОРЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Ускорение (мгновенное ускорение) материальной точки в данный момент времени равно первой производной от скорости или второй производной от радиус-вектора точки по времени.



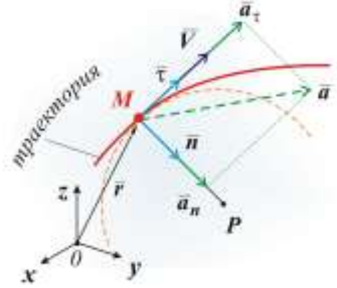


Рисунок 4 – К определению ускорения материальной точки

1. **Векторный способ записи**:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \equiv \dot{\bar{V}} = \ddot{\bar{r}}$$

2. **Координатный способ записи:**

$$\begin{cases} a_x = \dot{V}_x = \ddot{x} \\ a_y = \dot{V}_y = \ddot{y} \\ a_z = \dot{V}_z = \ddot{z} \end{cases}.$$

3. **Естественный способ записи:**

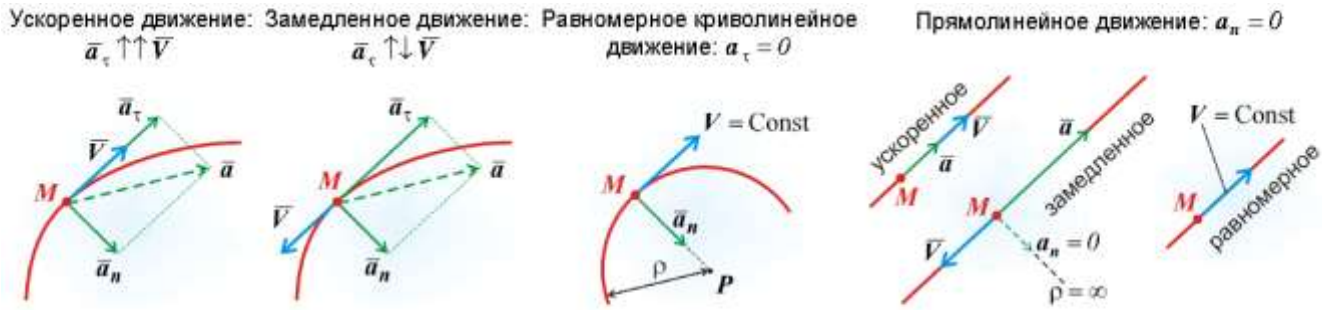
$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d(V\,\bar{\tau})}{dt} = \underbrace{\frac{dV}{dt}\tau}_{\bar{a}_\tau} + \underbrace{\frac{d\tau}{dt}V}_{\bar{a}_n} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$$

$$d\tau \approx |\tau| \cdot d\varphi \cdot \bar{n} = 1 \cdot \frac{d\sigma}{\rho} \cdot \bar{n} = \frac{d\sigma}{\rho} \cdot \bar{n} \Rightarrow \bar{a}_n = \frac{d\sigma V}{dt\,\rho}\bar{n} = \frac{V^2}{\rho}\bar{n}.$$

Таким образом, ускорение раскладывают по естественным осям на две составляющие: $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$.
$\vec{a}_n$ — **нормальное** (центростремительное) ускорение.
$\vec{a}_\tau$ — **касательное** (тангенциальное) ускорение.

$$\vec{a}_\tau = \frac{dV}{dt}\vec{\tau}, \quad \vec{a}_n = \frac{V^2}{\rho}\vec{n}, \quad \vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ



Равнопеременное движение: a_τ=const.

а) равноускоренное $\bar{V} \uparrow\uparrow \bar{a}_\tau$.

б) равнозамедленное $\bar{V} \uparrow\downarrow \bar{a}_\tau$.

Зависимость скорости точки от времени при равнопеременном движении:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} \Rightarrow \int dV = \int a_\tau dt \Rightarrow V - V_0 = a_\tau t,$$

$$V(t) = V_0 + a_\tau t.$$

Здесь V_0 – начальная скорость точки.

Зависимость координаты точки от времени при равнопеременном движении:

$$V = \frac{d\sigma}{dt} \Rightarrow \int d\sigma = \int V dt \Leftrightarrow \int d\sigma = \int (V_0 + a_\tau t) dt \Rightarrow \sigma - \sigma_0 = V_0 t + \frac{1}{2} a_\tau t^2$$

$$\sigma(t) = \sigma_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a_\tau t^2.$$

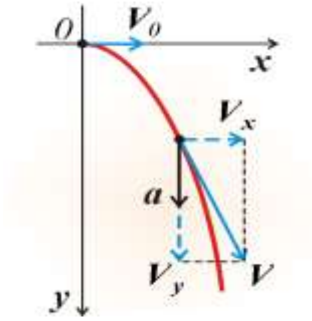
Здесь σ_0 – начальная координата точки.

Пример 3 (координатный способ задания движения).

При заданном законе движения точки

$$\begin{cases} x = V_0\, t \\ y = \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

определить ее траекторию, скорость и ускорение (g и V_0 – константы).



Исключив из заданных уравнений параметр t, получим уравнение траектории:

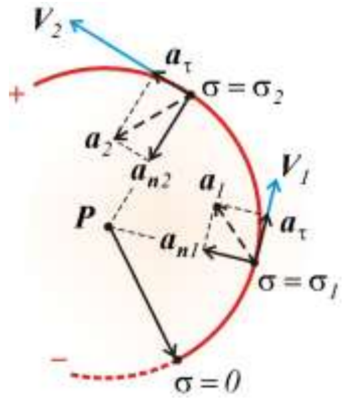
$$y = \frac{g}{2V_0^2} x^2.$$

Зависимость скорости от времени: $\begin{cases} V_x = \dot{x} = V_0 \\ V_y = \dot{y} = gt \end{cases}$, $\quad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{V_0^2 + (gt)^2}$

Ускорение: $\begin{cases} a_x = \dot{V}_x = 0 \\ a_y = \dot{V}_y = g \end{cases}$, $\quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = a_y = g$

Пример 4 (естественный способ задания движения).

Точка начинает двигаться из состояния покоя равноускоренно по окружности радиуса r и, пройдя путь σ_1, приобретает скорость V_1. Найти скорость V_2 и ускорение a_2 точки в момент, когда пройденный путь равен σ_2.



Так как точка начинает двигаться из состояния покоя, то

$$\sigma = \underbrace{\sigma_0}_{=0} + \underbrace{V_0}_{=0} t + \frac{a_\tau t^2}{2} = \frac{a_\tau t^2}{2}, \qquad V = \underbrace{V_0}_{=0} + a_\tau t = a_\tau t$$

Исключив из этих выражений из t, получим, что $a_\tau = \dfrac{V^2}{2\sigma}$.

Равноускоренное движение означает постоянство a_τ на всем пути, то есть:

$$a_\tau = \frac{V_1^2}{2\sigma_1} = \frac{V_2^2}{2\sigma_2} \Rightarrow V_2 = V_1 \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}.$$

Нормальное ускорение при $\sigma = \sigma_2$: $a_{n2} = \dfrac{V_2^2}{r}$.

Полное ускорение при $\sigma = \sigma_2$: $a_2 = \sqrt{a_{n2}^2 + a_\tau^2} = V_2^2 \sqrt{\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{4\sigma_2^2}} = V_1^2 \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} \sqrt{\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{4\sigma_2^2}}$.

Заметим, что центростремительные ускорения a_{n1} и a_{n2} отличаются друг от друга, что обусловлено различием соответствующих скоростей V_1 и V_2. Отсюда следует, что также различны полные ускорения a_1 и a_2.