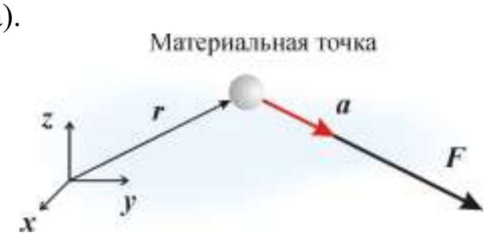
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ДИНАМИКА

Динамика – это раздел теоретической механики, в котором изучаются законы движения материальных тел под действием сил.
Материальную точку, на которую не наложено никаких связей, называют **свободной**.
Несвободная материальная точка, благодаря наложенным на нее связям, движется по заданной неподвижной поверхности или кривой; всякую несвободную материальную точку будем рассматривать как свободную, отбросив связь и заменив ее реакцией.

ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ (ЗАКОНЫ НЬЮТОНА)

1. **Закон инерции**: изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние (I закон Ньютона).

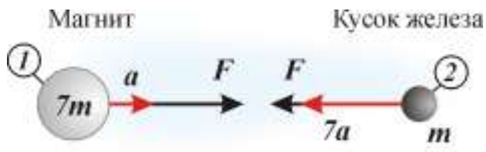


2. **Основной закон динамики**: произведение массы материальной точки на ускорение, которое она получает под действием силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с этой силой (II закон Ньютона):

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

Здесь сила $\vec{F}$ – равнодействующая всех сил $\vec{F_i}$, приложенных к телу:

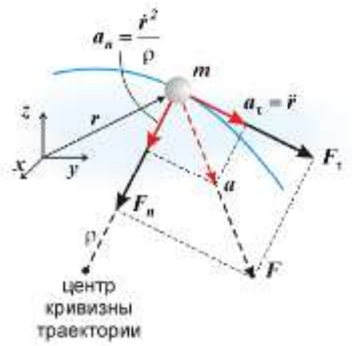
$$\vec{F} = \sum \vec{F_i}.$$



3. **Закон действия и противодействия**: две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны (III закон Ньютона):

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \quad F_{12} = F_{21} = F.$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ



Формулы кинематики:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

$$\bar{a} = \dot{\bar{V}} = \ddot{\bar{r}}, \quad a_\tau = \dot{V} = \ddot{r}, \quad a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\dot{r}^2}{\rho}$$

Способы записи II закона Ньютона.

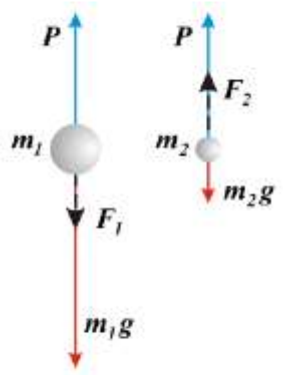
Векторный способ	Координатный	Естественный
$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F}$	$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{m\dot{r}^2}{\rho} = F_n \\ m\ddot{r} = F_\tau \end{cases}$

ДВЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1. **Первая задача динамики**: зная закон движения материальной точки и ее массу, определить действующую на нее силу.
Эту задачу решают с помощью основного закона динамики; при этом, если ускорение не задано непосредственно, то его предварительно вычисляют по формулам кинематики.
2. **Вторая или основная задача динамики**: зная массу точки и действующие на нее силы, определить закон ее движения.

Эту задачу решают с помощью общих теорем динамики или путем двойного интегрирования закона движения (в этом случае необходимо использовать начальные условия).

Пример 1 (первая задача динамики). Материальная точка массой m_1 опускается вниз с ускорением a под действием силы тяжести и некоторой подъемной силы P. Какой должна быть масса m_2 точки, чтобы она поднималась вверх с таким же ускорением?



Когда материальная точка опускается вниз, то на нее действует сила:

$$F_1=m_1a=m_1g-P.$$

Когда точка поднимается вверх, то на нее действует сила:

$$F_2=m_2a=P-m_2g.$$

Исключив из этих двух уравнений неизвестную величину P , получим:

$$m_2 = m_1\frac{g-a}{g+a}$$

Пример 2 (вторая задача динамики). Материальная точка массой m начинает прямолинейное движение вдоль оси x из состояния покоя под действием силы $F(t)=kt$. Найти закон движения точки.

С учетом основного закона динамики запишем:

$$F = ma \equiv m\dot{V} \equiv m\ddot{x} = kt$$

Проинтегрируем это выражение дважды:

$$\int m\ddot{x}dt = \int ktdt \;\Rightarrow\; m\dot{x} = \frac{1}{2}kt^2 + c_1$$

$$\int m\dot{x}dt = \frac{1}{2}k\int t^2dt + \int c_1dt \;\Rightarrow\; mx = \frac{1}{6}kt^3 + c_1t + c_2$$

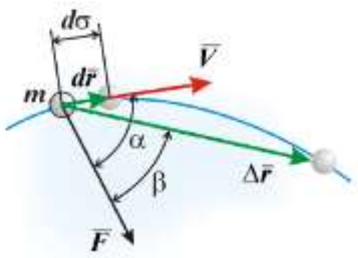
Учтем начальные условия:

$$V(t=0) \equiv \dot{x}(t=0) = 0 \;\Rightarrow\; c_1 = 0; \quad x(t=0) = 0 \;\Rightarrow\; c_2 = 0$$

В результате получили закон движения точки:

$$x = \frac{k}{6m}t^3$$

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ



Кинетической энергией материальной точки называют скалярную величину, равную половине произведения массы точки на квадрат ее скорости:

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

Кинетической энергией механической системы, состоящей из материальных точек количеством n, называют сумму:

$$T = \Sigma T_i = \frac{1}{2}\Sigma m_iV_i^2 , \qquad i = 1...n$$

РАБОТА СИЛЫ. МОЩНОСТЬ

Элементарной работой силы называют скалярное произведение силы на вектор элементарного перемещения точки:

$$dA = \overline{F}\cdot d\overline{r} \;\Rightarrow\; dA = F\,d\sigma\cos\alpha$$

Работа силы на любом конечном перемещении равна интегралу от элементарной работы, взятому вдоль этого перемещения:

$$A = \int \overline{F}\cdot d\overline{r} \;\;\Rightarrow\;\; A = \int F\cos\alpha \; d\sigma .$$

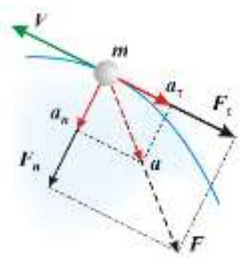
Если на протяжении движения сила остается постоянной ($\vec{F}$=const), то ее работа равна скалярному произведению этой силы на вектор перемещения точки:

$$A = \int \overline{F}\cdot d\overline{r} = \overline{F}\cdot\int d\overline{r} = \overline{F}\cdot\Delta\overline{r} \;\;\Rightarrow\;\; A = F\,\Delta r\cos\beta .$$

Мощностью называют величину, определяющую работу, совершаемую силой, в единицу времени, следовательно, мощность равна скалярному произведению силы на скорость точки ее приложения:

$$\frac{dA}{dt} = \overline{F}\cdot\frac{d\overline{r}}{dt} \;\;\Rightarrow\;\; W = \overline{F}\cdot\overline{V} = FV\cos\alpha .$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ



Изменение кинетической энергии точки при некотором ее перемещении равно сумме работ *всех сил*, действующих на точку на том же перемещении:

$$T - T_0 = \Sigma A_i .$$

Здесь T_0 – кинетическая энергия точки в начале пути.

Доказательство: распишем тангенциальное ускорение точки следующим образом:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\sigma}\cdot\underbrace{\frac{d\sigma}{dt}}_{V} = V\frac{dV}{d\sigma}$$

и подставим его в основной закон динамики, спроецированный на естественную ось τ:

$$ma_\tau = F_\tau,$$

где F – равнодействующая всех сил, приложенных к точке (то есть $F_\tau=\sum F_{i\tau}$). После соответствующих преобразований:

$$mV\frac{dV}{d\sigma} = F_\tau \;\;\Rightarrow\;\; mVdV = F_\tau d\sigma \;\;\Rightarrow\;\; d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = dA$$

получим выражение:

$$dT = dA.$$

Проинтегрировав это выражение по пройденному пути и с учетом того, что A – это суммарная работа всех сил, приложенных к точке на всем протяжении пути, получим окончательное выражение теоремы об изменении кинетической энергии в интегральной форме:

$$T - T_0 = \sum A_i.$$

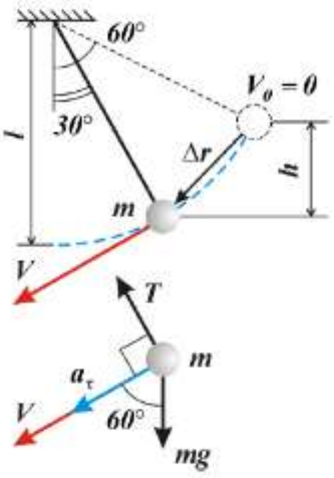
ТЕОРЕМА МОЩНОСТЕЙ ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

(теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме)

Производная от кинетической энергии материальной точки равна сумме мощностей всех сил, действующих на эту точку:

$$\dot{T} = \frac{dT}{dt} = \Sigma W_i .$$

Пример 3. Груз массой *m*, подвешенный на нити длиной *l*, отклонили от вертикали на угол 60° и отпустили без начальной скорости. Найти скорость и касательное ускорение груза в момент, когда нить образует с вертикалью угол 30°.



По теореме об изменении кинетической энергии в интегральной форме и с учетом того, что V_0=0:

$$\frac{mV^2}{2} = mgh, \qquad h = l(\cos 30^\circ - \cos 60^\circ) = 0{,}37l.$$

Отсюда выразим скорость точки:

$$V = \sqrt{2g \cdot 0{,}37l} = 2{,}72\sqrt{l}.$$

Применив теорему мощностей, получим:

$$2 \cdot \frac{mV}{2} \cdot a_\tau = mg \cdot V \cdot \cos 60^\circ + T \cdot V \cdot \cos 90^\circ.$$

Отсюда выразим касательное ускорение точки:

$$a_\tau = \frac{g}{2}.$$